

Wzory

Przedstawię wzory dotyczące rat malejących, jeżeli chodzi o raty równe, to w arkuszach kalkulacyjnych wzory dla takich rat zostały ujęte w funkcje arkuszowe, więc pokażę również te funkcje, wzory dotyczą sytuacji, gdy raty są płatne *z dołu*, czyli na koniec okresu płatności (prawie wszystkie kredyty są w ten sposób spłacane). Jeżeli bank stosuje regułę 365/360 to oprocentowanie należy pomnożyć przez $1,0138\dots (= \frac{365}{360})$ w latach, w których luty ma 28 dni i przez $1,0166\dots (= \frac{366}{360})$ dla lat w których luty ma dni 29. Przy czym w przypadku gdy kredyt jest dłuższy i jest spłacany zarówno przez lata przestępne jak i nie, to bank może np. wyliczyć raty dla lat przestępnych tak jakby były zwykłymi, a to co brakuje doliczyć do ostatniej raty (rata wyrównawcza). W niektórych przypadkach wzory dadzą wyniki trochę inne niż wyliczenia banku, przy czym różnice te nie będą wielkie. Dzieje się tak z kilku powodów. Jeżeli od momentu obowiązywania umowy (jeden dzień po podpisaniu umowy) do daty płatności pierwszej raty (razem z tym dniem) minie mniej czasu niż miesiąc, to odsetki zostaną policzone tylko za te dni, dla których umowa obowiązywała, a więc będą mniejsze (i pierwsza rata również, ewentualnie ostatnia wyrównawcza rata będzie mniejsza). Ponadto data płatności dowolnej raty może wypaść w dniu wolnym od pracy i dzień płatności przesunie się np. o jeden dzień, za ten jeden dzień bank może sobie doliczyć odsetki. Mogą być jeszcze inne przyczyny. Jednakże (prawie zawsze) podstawienie do wzorów da dokładne albo bardzo zbliżone do dokładnych wartości.

Raty równe

Niech o oznacza oprocentowanie nominalne w skali roku, przy czym zakładamy że oprocentowanie¹ o jest większe niż 0 (jeśli oprocentowanie jest równe zero to wysokość raty jest równa kwocie kredytu podzielonej przez liczbę rat), i niech oznacza liczbę rat w roku (jeżeli oprocentowanie jest w skali roku, a raty spłacamy co miesiąc to będziemy mieli $i = 12$, dla rat spłacanych co kwartał $i = 4$), przez q będziemy rozumieli $1 + \frac{o}{i}$, K oznacza Kwotę kredytu lub pożyczki (kwotę, od której liczone są odsetki, tzn. kredyt powiększony o te opłaty które są kredytowane, banki czasami nazywają tę wartość kredytem brutto), zaś n liczbę okresów (np. liczbę miesięcy) przez które będziemy spłacać dług powstały z zaciągniętego kredytu lub pożyczki. Wzory dotycząca sytuacji, w której rata jest płatna na koniec okresu (prawie wszyst-

¹Jeśli wykonujemy obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym albo na kalkulatorze w żadnym wypadku nie należy zapominać o znaku procenta, alternatywnie w obliczeniach możemy zamienić procenty na odpowiadające im liczby, to znaczy 9% na 0,09; 12% na 0,12 itd.

kie kredyty, są w ten sposób spłacane) W arkuszach kalkulacyjnych wzory dla rat stałych zostały ujęte w funkcje arkuszowe, wykorzystując je można sobie znacznie ułatwić prace.² Funkcje działają na argumentach, których wartości należy wstawić do funkcji, bezpośrednio lub podając adres komórki, w których są przechowywane. Argumenty, które pojawiają się w większości takich funkcji to: **opr**, **nrraty**, **liczbarat**, **kredyt** (często z minusem, bo jest to związane z kierunkiem przepływów finansowych). Przy czym **opr** to oprocentowanie, które należy podzielić przez 12 jeśli raty spłacamy co miesiąc (lub przez 4, jeśli spłacamy raty co kwartał), **nrraty** to numer raty, której dotyczy dane wyliczenie, **liczbarat** to liczba rat (np. płatnych co miesiąc, ewentualnie płatnych co kwartał) przez które będziemy spłacali dług, a **kredyt** to kwota kredytu powiększona o koszty, które będą kredytowane (kwota, od której płacimy odsetki albo kredyt brutto). W przypadku rat malejących nie przewidziano funkcji arkuszowych, więc jeżeli chcemy wykonać jakiegokolwiek obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym trzeba wzory zapisać za pomocą formuł. Rata równa R wynosi:

$$R = Kq^n \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right) = \frac{K(q^n)(q-1)}{q^n-1}$$

W arkuszach kalkulacyjnych (Arkusz Google, Excel, OpenOffice Calc) do wyliczenia raty można wykorzystać funkcję PMT, przy czym zależy ona od 3 argumentów:

$$\text{PMT}(\text{opr}; \text{liczbarat}; -\text{kredyt})$$

Część kapitałowa raty (albo: rata kapitałowa) z numerem k jest równa:

$$T_k = Kq^{k-1} \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right)$$

W arkuszach kalkulacyjnych do wyliczenia raty kapitałowej służy funkcja PPMT, która przyjmuje cztery argumenty:

$$\text{PPMT}(\text{opr}; \text{nrraty}; \text{liczbarat}; -\text{kredyt})$$

²Jest to bardzo mało prawdopodobne, żeby w różnych wersjach arkusza jednej firmy lub organizacji funkcje się różniły nazwą lub kolejnością argumentów aczkolwiek nie można całym tego powtórzyć, informacje podane przez mnie dotyczą wersji OpenOffice 4.1.7; arkuszy Google testowanych w kwietniu 2020 (Google przypuszczalnie nie numeruje kolejnych wersji) oraz Excela w wersjach: Excel dla Office 365, Excel dla Office 365 dla komputerów Mac, Excel dla sieci Web, Excel 2019, Excel 2016, Excel 2019 dla komputerów Mac, Excel 2013, Excel 2010, Excel 2007, Excel 2016 dla komputerów Mac, Excel 2011 dla komputerów Mac, Excel Starter 2010.

(zauważmy, że tu i w innych miejscach **nrraty** = k). Część odsetkowa raty z numerem k jest równa:

$$O_k = R - T_k = K(q^n - q^{k-1})\left(\frac{q - 1}{q^n - 1}\right)$$

część odsetkowa, może być również obliczona jako oprocentowanie (podzielone przez 12 dla rat miesięcznych i podzielone przez 4 dla rat kwartalnych) przemnożone przez niespłacony jeszcze kapitał. W arkuszach kalkulacyjnych do wyliczenia wysokości odsetek (w racie z numerem **nrraty**) korzysta się z funkcji

IPMT(**opr**; **nrraty**; **liczbarat**; **-kredyt**)

Wszystkie te trzy funkcje (tzn. PMT, PPMT, IPMT) mają również wersje rozszerzone, gdzie na koniec dodaje się jeszcze kolejny argument: **warprzyszła**, wartość którą chcemy osiągnąć, tu wpisujemy zero (całkowita spłata kredytu) i jeszcze jeden argument **typ**, przyjmujący wartości 0 lub 1. Zero oznacza płatność raty na koniec okresu (bardzo często tak spłaca się kredyty), a jeden płatność raty na początek okresu. W zasadzie nie ma potrzeby, żeby korzystać z wersji rozszerzonych, chyba że ktoś miałby jakiś wyjątkowy kredyt w którym odsetki płacone są na początek okresu płatności. Suma kapitału spłaconego w ratach z numerami od k_1 do k_2 :

$$S_{k_1, k_2} = K \frac{q^{k_2} - q^{k_1-1}}{q^n - 1}$$

W szczególnym przypadku, jeśli $k_1 = 1$, to znaczy interesuje nas suma spłaconego Kapitału od pierwszej raty do raty z numerem k_2 wzór redukuje się do postaci:

$$S_{1, k_2} = K \frac{q^{k_2} - 1}{q^n - 1} = K \frac{1 - q^{k_2}}{1 - q^n}$$

W arkuszach kalkulacyjnych do wyliczenia kapitału spłaconego w ratach od k_1 do k_2 służy funkcja

-CUMPRINC(**opr**; **liczbarat**; **kredyt**; **nrratypocz**; **nrratykon**; **typ**)

w Excelu funkcja ta ma również polską nazwę, podobnie arkusz Google ale kolejność przyjmowanych argumentów jest taka sama, to znaczy, że należy skorzystać z takiej funkcji:

-SPŁAC.KAPIT(**opr**; **liczbarat**; **kredyt**; **nrratypocz**; **nrratykon**; **typ**)

tym razem znak minus jest przed całą funkcją. Wartość **nrratypocz** to numer raty od której zaczynamy sumowanie spłaconego kapitału (czyli k_1),

nrratykon to numer raty przy której kończymy sumowanie kapitału (czyli k_2), z kolei **typ** przyjmuje dwie wartości 0 lub 1, 0 oznacza płatność na koniec okresu (prawie wszystkie kredyty są udzielane w taki sposób, że płatność jest na koniec okresu), 1 płatność na początek okresu. Przydatna może być jeszcze możliwość sumowania zapłaconych odsetek w ratach z numerami od k_1 do k_2 . Wzór na taką sumę wygląda tak:

$$S_{k_1, k_2}^{ods} = K \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right) \left((k_2 - k_1 + 1)q^n - \frac{q^{k_1-1}(1 - q^{k_2-k_1+1})}{1-q} \right)$$

jeśli $k_1 = 1$, to wzór redukuje się do postaci:

$$S_{1, k_2}^{ods} = K \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right) \left(k_2 q^n - \frac{1 - q^{k_2}}{1 - q} \right)$$

Funkcja, która służy do sumowania zapłaconych odsetek w ratach od numeru **nrratypocz** do **nrratykon**:

–CUMIPMT(**opr**; **liczbarat**; **kredyt**; **nrratypocz**; **nrratykon**; **typ**)

typ oraz inne argumenty są takie jak np. przy funkcji CUMPRINC. W Excelu i arkuszu Google ta funkcja ma polski odpowiednik:

–SPŁAC.ODS(**opr**; **liczbarat**; **kredyt**; **nrratypocz**; **nrratykon**; **typ**)

Wzór na liczbę miesięcznych rat w zależności od wysokości raty, kwoty kredytu oraz oprocentowania:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K \frac{q}{i}}{R - K \frac{q}{i}} + 1\right)}{\ln(q)} = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - K \frac{q}{i}}\right)}{\ln(q)}$$

gdzie \ln jest logarytmem naturalnym. W arkuszach kalkulacyjnych do wyliczenia tej wielkości służy funkcja

NPER(**opr**; **wysraty**; –**kredyt**)

Argument **wysraty** to wysokość raty jaką chcemy (i możemy płacić). Istnieje wersja rozszerzona, która przyjmuje jeszcze dwa argumenty **warprzyszła**, wartość którą chcemy osiągnąć, tu wpisujemy zero (całkowita spłata kredytu) i jeszcze jeden argument **typ**, przyjmujący wartości 0 (płatność na koniec okresu) lub 1 (płatność na początku okresu). Jeszcze jedną kwestią jest obliczenie liczby złotych do oddania, za każdą pożyczoną złotówkę:

$$I = n \cdot q^n \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right)$$

gdzie I oznacza liczbę złotych, które należy oddać za każdą pożyczoną złotówkę.

Raty malejące

Symbol o oznacza oprocentowanie nominalne dla okresu (w skali) roku, i niech oznacza ilość rat w roku (dla spłat co miesiąc $i = 12$, dla kwartalnych $i = 4$), K oznacza Kwotę kredytu lub pożyczki (kwotę, od której liczone są odsetki, tzn. kredyt powiększony o te opłaty które są kredytowane, banki czasami nazywają tę wartość kredytem brutto), zaś n liczbę okresów (np. liczbę miesięcy) przez które będziemy spłacać kredyt. Litera k oznacza numer raty, będziemy również mieli $p = \frac{o}{i}$. Wtedy rata z numerem k jest równa:

$$R_k = \frac{K}{n}(1 + (n - k + 1)p)$$

Stąd wynika, na przykład, że rata z numerem 1 (pierwsza rata) jest równa:

$$R_1 = \frac{K}{n}(1 + (n - 1 + 1)p) = \frac{K}{n}(1 + np)$$

Część kapitałowa każdej raty jest równa

$$T = \frac{K}{n}$$

Część odsetkowa raty z numerem k jest równa

$$O_k = R_k - T = \frac{K}{n}(n - k + 1)p$$

część odsetkowa, podobnie jak dla rat równych może być również obliczona jako oprocentowanie (podzielone przez 12 dla rat miesięcznych i podzielone przez 4 dla rat kwartalnych) przemnożone przez niespłacony jeszcze kapitał. Suma kapitału spłaconego w ratach z numerami od k_1 do k_2 :

$$S_{k_1, k_2}^{kap} = (k_2 - k_1 + 1) \frac{K}{n} = K \frac{k_2 - k_1 + 1}{n}$$

w szczególnym przypadku, jeśli $k_1 = 1$, to nas interesuje nas suma spłaconego kapitału od pierwszej raty do raty z numerem k_2 wzór redukuje się do postaci:

$$S_{1, k_2}^{kap} = k_2 \frac{K}{n} = K \frac{k_2}{n}$$

Suma zapłaconych odsetek w ratach z numerami od k_1 do k_2 :

$$S_{k_1, k_2}^{ods} = \frac{Kp}{n} \left(\frac{2n + 2 - k_1 - k_2}{2} \right) (k_2 - k_1 + 1)$$

jeśli $k_1 = 1$, to znaczy interesuje nas suma spłaconych odsetek od pierwszej raty do raty z numerem k_2 wzór redukuje się do postaci:

$$S_{1,k_2}^{ods} = \frac{Kp}{n} \left(\frac{2n+1-k_2}{2} \right) (k_2) = \frac{Kpk_2}{n} \left(\frac{2n+1-k_2}{2} \right)$$

Podam jeszcze wzór na liczbę miesięcznych rat w zależności od wysokości pierwszej raty (jaką możemy i chcemy płacić), kwoty kredytu lub pożyczki oraz oprocentowania:

$$n = \frac{K}{R_1 - Kp}$$

Jeżeli I oznacza liczbę złotych, które należy oddać za każdą pożyczoną złotówkę, to

$$I = 1 + p \left(\frac{n+1}{2} \right)$$